j na j

Ing. René Vápeník

Výraz j^j je oblíbenou hříčkou na Ústavu elektroenergetiky FEKT VUT Brno.

Nejprve si výraz rozepíšeme: $j^j = (0+j)^j = \left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + j.\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\right)^j = \left[1\left(\cos\frac{\pi}{2} + j.\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^j$

Máme ten samý výraz, jen přepsaný do goniometrického tvaru.
Umocňování komplexního čísla v goniometrickém tvaru je již jednoduché, umocníme absolutní hodnotu a vynásobíme argument. Jednička, umocněná čímkoliv je vždycky zase 1.

Takže máme modul $r = |z| = 1$ a argument $\varphi = \arg z = j\frac{\pi}{2}$

Dostáváme tak goniometrický tvar komplexního čísla $1.\left(\cos\frac{j.\pi}{2} + j.\sin\frac{j.\pi}{2}\right)$

A toto následně převedeme do exponenciálního tvaru:

$$1.\left(\cos\frac{j.\pi}{2} + j.\sin\frac{j.\pi}{2}\right) = 1.e^{j.\frac{j.\pi}{2}} = e^{j^2.\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cong 0{,}2079$$

a máme výsledek:

$$j^j = e^{-\frac{\pi}{2}} \cong 0{,}2079$$

Obdobně pro výraz j^{-j} dostáváme $j^{-j} = e^{\frac{\pi}{2}} \cong 4{,}8105$

Stručné shrnutí

Komplexní číslo z

- můžeme napsat v algebraickém tvaru: $z = x + jy$
- v goniometrickém tvaru: $z = (r.\cos\varphi + j\sin\varphi)$
- v exponenciálním tvaru: $z = r.e^{\varphi}$

Platí:

$\operatorname{Re} z = x = r.\cos\varphi$

$\operatorname{Im} z = y = r.\sin\varphi$

$\operatorname{Abs} z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$\operatorname{Arg} z = \varphi = arctg\left(\frac{y}{x} + n.\pi\right) pro\ \ x \neq 0$

$(n = 0\ pro\, x > 0, n = 1\ pro\, x < 0)$

$\varphi = \frac{\pi}{2}\ pro\, x = 0, y > 0;$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}\ pro\, x = 0, y < 0$